Trimestre Septiembre-Diciembre 2007
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
Probabilidades para Ingenieros — CO3121
Guía de ejercicios # 7 (Primera parte)

Ejercicios

1. Se fabrica cierto tipo de hilo con una resistencia a la tensión media de 78.3 kilogramos y una desviación estándar de 5.6 kilogramos. ¿Cómo cambia la varianza de la media muestral cuando el tamaño de la muestra:
   a) aumenta de 64 a 196?
   b) disminuye de 784 a 49?

2. Las estaturas de 1000 estudiantes están distribuidas aproximadamente normal con una media de 174.5 centímetros y una desviación estándar de 6.9 centímetros. Si se extraen 200 muestras aleatorias de tamaño 25 de esta población y las medias se registran al décimo más cercano de centímetro, determine
   a) la media y la desviación estándar de la distribución muestral de $\overline{X}$;
   b) el número de medias muestrales que caen entre 172.5 y 175.8 centímetros inclusive;
   c) el número de medias muestrales que caen por debajo de 172.0 centímetros.

3. Si cierta máquina fabrica resistencias eléctricas que tienen una resistencia media de 40 ohms y una desviación estándar de 2 ohmns, ¿cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 36 de estas resistencias tenga una resistencia combinada de más de 1458 ohmns?

4. El tiempo en que el cajero de un banco con servicio en el automóvil atiende a un cliente es una variable aleatoria con una media de $\mu = 3{,}2$ minutos y una desviación estándar de $\sigma = 1{,}6$ minutos. Si se observa una muestra aleatoria de 64 clientes, encuentre la probabilidad de que su tiempo medio con el cajero sea
   a) a lo más 2.7 minutos;
   b) más de 3.5 minutos;
   c) al menos 3.2 minutos pero menos de 3.4 minutos.

5. En un proceso químico, la cantidad de cierto tipo de impurezas en el producto es difícil de controlar y por ello es una variable aleatoria. Se especula que la cantidad media de la población de impurezas es de 0.20 gramos por gramo de producto. Se sabe que la desviación estándar es 0.1 gramos por gramo. Se realiza un experimento para aprender más con respecto a la especulacíón de que $\mu = 0{,}2$. El proceso se lleva a cabo 50 veces en un laboratorio y el promedio de la muestra $\overline{x}$ resulta ser 0.23 gramos por gramo. Comente sobre la especulación de que la cantidad media de impurezas es 0.20 gramos por gramo. Utilice el teorema central del límite en su respuesta.

6. La calificación media de estudiantes de primer año en un examen de aptitudes en cierta universidad es 540, con una desviación estándar de 50. ¿Cuál es la probabilidad de que dos grupos de estudiantes seleccionados al azar, que consisten en 32 y 50 estudiantes, respectivamente, difieran en sus calificaciones medias por
   a) más de 20 puntos?
   b) una cantidad entre 5 y 10 puntos?

   Suponga que las medias se miden con cualquier grado de precisión.

7. Dos máquinas diferentes de llenado de cajas se utilizan para llenar cajas de cereal en la línea de ensamblaje. La medición fundamental que está influida por tales máquinas es el peso del producto en las máquinas. Los ingenieros están bastante seguros de que la varianza en el peso del producto es $\sigma^2 =$ 1 onza. Se realizan experimentos usando ambas máquinas con tamaños muestrales de 36 cada una. Los promedios muestrales para las máquinas A y B son $\overline{x}_A = 4{,}5$ onzas y $\overline{x}_B = 4{,}7$ onzas. Los ingenieros parecen sorprendidos de que los dos promedios muestrales para las máquinas de llenado sean tan diferentes.
   a) Utilice el teorema central del límite para determinar
   $$Pr(\overline{X}_A - \overline{X}_B \geq 0{,}2)$$
   con la condición de que $\mu_A = \mu_B$.
   b) ¿Parece como si los experimentos mencionados, de cualquier forma, apoyaran consistentemente una conjetura de que las dos medias de las poblaciones para las dos máquinas son diferentes?. Explique utilizando su respuesta del inciso a.

8. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria a partir de una distribución que sólo pueda adoptar valores positivos. Utilice el teorema central del límite para argumentar que si n es suficientemente grande, entonces $Y = X_1X_2\ldots X_n$ tiene aproximadamente una distribución logarítmica normal.

9. Se escoge un número X aleatoriamente del conjunto $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Luego se escoge aleatoriamente un número Y del subconjunto de A de números no mayores que X.
   a) Halle la función de probabilidad conjunta de X e Y.
   b) Halle la función de probabilidad condicional de X dado que $Y = i$, $i = 1, \ldots, 5$.
   c) Diga si X e Y son independientes y por qué?.

10. La función de probabilidad conjunta de X e Y está dada por:
    $$p(1,1) = \frac{1}{8}; p(1,2) = \frac{1}{4}; p(2,1) = \frac{1}{8}; p(2,2) = \frac{1}{2}.$$
    Halle la función de probabilidad de X dado que $Y = i$ para $i = 1, 2$

11. La función de probabilidad e X e Y está dada por:
    $$f(x,y) = xe^{-x(y+1)}, \quad x > 0, \; y > 0.$$

a) Encuentre la densidad condicional de X dado que $Y = y$ y la densidad condicional de Y dado que $X = x$.
b) Encuentre la función de densidad de $Z = XY$.

12. La función de probabilidad e X e Y está dada por:
$$f(x,y) = c(y^2 - x^2)e^{-y}, \qquad -y \leq x \leq y, \ \ 0 < y < \infty.$$
Encuentre la distribución condicional de X dado que $Y = y$.

13. Un dado perfecto es lanzado sucesivamente. Sean $X=$ número de lanzamientos para obtener un 6, e $Y=$ número de lanzamientos para obtener un 5. Encuentre:
a) $E(X)$;
b) $E(X|Y = 1)$;
c) $E(X|Y = 5)$.

14. Una urna contiene 4 bolas blancas y 6 negras. Se sacan, sin reemplazamiento, 3 bolas; y luego, también sin reemplazamiento 5 bolas. Sean $X=$ número de bolas blancas en las primeras 3 extracciones, e $Y=$ número de bolas blancas en las últimas 5 extracciones. Halle $E(X|Y = i)$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

15. La densidad conjunta de X e Y está dada por:
$$f(x,y) = \frac{e^{\frac{-x}{y}} e^{-y}}{y}, \qquad 0 < x < \infty; \ \ 0 < y < \infty.$$
Calcule $E(X^2|Y = y)$.

16. La densidad conjunta de X e Y está dada por
$$f(x,y) = \frac{e^{-y}}{y}, \qquad 0 < x < y; \ \ 0 < y < \infty.$$
Calcule $E(X^3|Y = y)$.

17. Se toma un punto (X, Y) al azar en el triángulo de vértices (0,0), (0,2) y (1,1). Probar que $E(Y|X = x)$ no depende de x. ¿Son X e Y independientes?